

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЧОРНОМОРСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ПЕТРА МОГИЛИ

**Савицька Вікторія Петрівна**

УДК 517.95+ 004.021

**Дослідження симетрійних властивостей рівнянь математичної фізики  
в Maple з використанням бібліотеки SADE**

**МНР.ПЗ.0-607м.11953096**

Автореферат  
магістерської наукової роботи на здобуття освітньої кваліфікації  
«Магістр системного аналізу»

Миколаїв – 2019

Магістерська наукова робота є рукопис.

Робота виконана в Чорноморському національному університеті імені Петра Могили Міністерства освіти і науки України на кафедрі інтелектуальних інформаційних систем

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук,  
доцент кафедри прикладної та вищої  
математики А. І. Воробйова

Рецензент: кандидат технічних наук, доцент  
кафедри інженерії програмного  
забезпечення А. В. Швед

Захист відбудеться «28» лютого 2019 р. о 9<sup>30</sup> год. на засіданні екзаменаційної комісії (ауд. 2-403) у Чорноморському національному університеті імені Петра Могили за адресою: 54003, м. Миколаїв, вул. 68-ми Десантників, 10.

З магістерською науковою роботою можна ознайомитися в бібліотеці Чорноморського національного університету імені Петра Могили за адресою: 54003, м. Миколаїв, вул. 68-ми Десантників, 10.

Автореферат представлений «27» лютого 2019 р.

Секретар  
екзаменаційної комісії,  
к.пед.н., доцент

Н. М. Болюбаш

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

### **Актуальність теми.**

Сучасне дослідження математичної моделі, заснованої на диференціальних рівняннях з частинними похідними, зазвичай використовує групові властивості. Зараз є велика кількість робіт, пов'язаних зі знаходженням груп, що допускають перетворення і груповою класифікацією диференціальних рівнянь, що виникають в механіці суцільного середовища, електродинаміки, теорії поля. Продовженням цих досліджень є програма підмоделей, розроблена Л. В. Овсянніковим. Одна з головних цілей цієї програми полягає в тому, щоб описати системи рівнянь (підмоделі), отримані з початкової моделі.

Перехід від основної моделі до рівнянь з меншим числом незалежних змінних прийнято називати редукцією. Редукцію можна здійснювати і на основі неklasичних симетрій, груп перетворень. Однак завдання знаходження неklasичних симетрій часто виявляється занадто складною, так як воно пов'язане з рішенням нелінійних перевизначених систем рівнянь з частинними похідними.

Фундаментальні ідеї та методи, що лежать в основі математичної теорії симетрії ДРЧП беруть початок в працях норвезького математика Софуса Лі.

Методи Лі завойовують усе більше визнання в теорії інваріантів, теорії біфуркацій, теорії керування, класичній і квантовій механіці, загальної теорії відносності і у багатьох областях математичної і теоретичної фізики.

В Україні методи Лі почали розвиватися у Києві В.П. Єрмаковим, Г.В. Пфейффером, М.К. Куренським. Сучасний виклад теорії подано в роботах В.І.Фушича та його учнів.

Багато проблем теорії симетрій не є достатньо вивченими. На деякі питання, що виникають у цій теорії, лише недавно знайдено відповіді, більшість же таких питань і досі залишаються відкритими.

**Об'єктом дослідження** є симетрійні властивості деяких хвильових та еволюційних рівнянь математичної фізики першого та другого порядку: рівняння ейконалу, рівняння нестационарної фільтрації, нелінійне хвильове на лінійне рівняння теплопровідності зі спеціальною правою частиною.

**Предметом дослідження** є аналіз можливостей використання комп'ютерної математики для пошуку класичних (в сенсі Лі) та некласичних групи симетрій відповідних диференціальних рівнянь в частинних похідних (ДРЧП).

**Метою дослідження** є застосування методів класичної та некласичної Q-умовної симетрії для дослідження, використовуючи засоби математичного пакету Maple, стандартну бібліотеку PDEtools та SADE, симетрійних властивостей деяких хвильових та еволюційних рівнянь математичної фізики першого та другого порядку: рівняння ейконалу, рівняння нестационарної фільтрації, нелінійне хвильове на лінійне рівняння теплопровідності зі спеціальною правою частиною. Проведення редукції та знаходження точних розв'язків відповідних нелінійних рівнянь. Також проведення аналізу тестування бібліотек SADE та PDEtools пакету Maple.

**Методи дослідження.** Для дослідження групової класифікації використано класичний метод Лі. Основні перетворення еквівалентності знайдено з використанням інфінітезімального підходу, запропонованого в роботах В. І. Фущича, А. І. Воробйової, а додаткові перетворення — прямим методом. Знаходження точних розв'язків диференціальних рівнянь в частинних похідних та їх розмноження в даній роботі здійснюється за допомогою методу симетрійної редукції. Пошук класичної лієвської та некласичної нелієвської симетрій відбувається за допомогою бібліотек SADE та PDEtools пакету Maple.

#### **Практичне значення отриманих результатів.**

В роботі досліджено дві бібліотеки математичного пакету Maple: SADE та PDEtools. Проведений аналіз бібліотеки SADE на підставі дослідження симетрійних властивостей ДРЧП. Результати цього дослідження представлені в третьому розділі роботи. В цьому полягає практичне значення одержаних результатів.

#### **Апробація результатів магістерської наукової роботи.**

1. Всеукраїнська науково-методична конференція «Могилянські читання – 2015: досвід та тенденції розвитку суспільства в Україні: глобальний, національний та регіональний аспекти». ЧДУ ім. П. Могили, 2015

2. Актуальні проблеми сучасної прикладної математики : матеріали I –ша Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих науковців. Миколаїв : НУК, 2016.

3. Всеукраїнська науково-практична конференції студентів, аспірантів та молодих науковців «Інтелектуальні інформаційні системи». – Миколаїв: ЧДУ імені Петра Могили, 2016

4. Актуальні проблеми сучасної прикладної математики : матеріали II –га Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих науковців. Миколаїв : НУК, 2017.

5. Ольвійський форум – 2018 : Стратегії країн Причорноморського регіону в геополітичному просторі : XII міжнар. наук.-практ. конф. 7–10 червня 2018 р., м. Миколаїв.

Основні результати роботи були представлені на Всеукраїнському конкурсі студентських наукових робіт у галузі «Математичні науки» та в Стипендіальній програмі «Завтра.UA» відкритому конкурсі для добору найбільш обдарованих і цілеспрямованих студентів провідних вищих навчальних закладів (ВНЗ) України. Тема наукової роботи: «Умовна Q-симетрія та точні розв'язки рівняння нестационарної фільтрації» (науковий керівник –доцент, канд. ф-м. наук А. І. Воробйова).

### **Публікації.**

1. Воробйова А.І., Савицька В.П Точні розв'язки рівняння нестационарної фільтрації – Всеукраїнська науково-методична конференція «Могилянські читання – 2015: досвід та тенденції розвитку суспільства в Україні: глобальний, національний та регіональний аспекти» : [збірник тез]. – Миколаїв: Вид-во ЧДУ ім. П. Могили, 2015, с 95-98.

2. Савицька В. Дослідження симетрійних властивостей рівняння нестационарної фільтрації. Актуальні проблеми сучасної прикладної математики : матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих науковців. – Миколаїв : НУК, 2016. С.73—76.

3. Савицька В.П. Дослідження симетрійних властивостей рівняння нестационарної фільтрації в пакеті Maple – Тези Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих науковців «Інтелектуальні інформаційні системи». – Миколаїв: Вид-во ЧДУ імені Петра Могили, 2016. – 168 с.

4. Савицька В. П. Дослідження рівняння теплопровідності / В. П. Савицька // // Актуальні проблеми сучасної прикладної математики : матеріали II Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих учених. – Миколаїв : НУК, 2017. – С. 85–87.

5. Воробйова А. І. Розробка окремих модулів системи maple інтерфейсу для дослідження Q-умовної симетрії ДРЧП / А. І. Воробйова, В. П. Савицька // Ольвійський форум – 2018 : Стратегії країн Причорноморського регіону в геополітичному просторі : XII міжнар. наук.-практ. конф. 7–10 червня 2018 р., м. Миколаїв : тези доп. : Автоматизація та комп'ютерно-інженерні технології. АСУ, CASE – засоби та програмна інженерія. Інтелектуальні інформаційні системи. Комп'ютерна інженерія / Чорном. нац. ун-т ім. Петра Могили. – Миколаїв : Вид-во ЧНУ ім. Петра Могили, 2018. – С. 47–49.

**Структура магістерської наукової роботи.** Магістерська наукова робота складається із вступу, п'яти розділів, висновків, додатків. Загальний обсяг роботи складає 135 сторінок, 4 рисунка, 2 таблиці та 34 посилання на літературні джерела.

### **ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ**

У вступі подано загальну характеристику досліджуваної теми, обґрунтовано актуальність дипломної роботи, проаналізовано сучасний стан розглянутих проблем, сформульовано мету, завдання дослідження, відзначено практичну цінність отриманих результатів, подано інформацію про структуру та обсяг роботи.

У першому розділі «Огляд рівнянь математичної фізики та основи симетрійного аналізу» приведені основні поняття з теорії групового аналізу.

Розглянуто означення однопараметричної групи перетворень та наведені приклади, такі як групи зсувів, групи лінійних гомеоморфізмів, група делатації, групи поворотів. Наведене поняття локальної однопараметричної групи Лі локальних перетворень простору,  $r$ -параметричної групи Лі,  $n$ -вимірного векторного простору. Описано критерій Лі, першу теорему Лі, яка встановлює однозначну відповідність між групою Лі перетворень  $G_r$  та алгеброю Лі. Та наведено поняття групи інваріантності (симетрії). Розглянута теорія продовження інфінітезимального оператора.

Другий розділ «Теоретико-груповий метод для дослідження симетрійних властивостей основних рівнянь математичної фізики» описує метод редукції, який показаний на прикладах рівняння нестационарної фільтрації, нелінійного хвильового рівняння, рівняння ейконалу та лінійного рівняння теплопровідності. Рівняння розглядаються в загальному вигляді. Знаходяться максимальні (в сенсі Лі) алгебри інваріантності. В рівнянні нестационарної фільтрації та нелінійному хвильовому рівнянні досліджена умовна симетрія, яка базується на використанні критерію  $Q$ -умовної інваріантності. Критерії умовної інваріантності генерують анзаци (спеціальні підстановки), за допомогою яких дані диференціальні рівняння в частинних похідних зводяться до звичайних диференціальних рівнянь.

Третій розділ «Використання Maple для дослідження симетрійних властивостей рівнянь математичної фізики» є основним розділом роботи. В ньому розглянуті можливості математичного пакету Maple для відшукування симетрій диференціальних рівнянь в частинних похідних (ДРЧП). Описаний пакет PDEtools та основні його команди та методи для дослідження симетрійних властивостей диференціальних рівнянь в частинних похідних: Infinitesimals, symmetryTest, InfinitesimalGenerator, InvariantSolution. Описаний програмний пакет SADE (Symmetry Analysis of Differential Equations) та його процедури, направлені на знаходження точних розв'язків диференціальних рівнянь в частинних похідних: liesymmetries, ncsymmetries, LBSymmetries, comm, PDEreduction, invariant sol, com table. Використовуючи методи даних пакетів були досліджені симетрійні властивості диференціальних рівнянь в частинних похідних на прикладах рівнянь,

що розглядалися в другому розділі роботи та тих, що описані в списку використаних джерел. Описано алгоритм знаходження лієвської симетрії та неklasичної симетрії, що демонструється кодом, який описано в додатку. Отримані інфінітезимальні оператори групи інваріантності розглянутих диференціальних рівнянь в частинних похідних. Показана лієвська, неklasична симетрія та симетрія Лі-Беклунда. Також здійснений порівняльний аналіз можливостей даних бібліотек, показані переваги використання пакету SADE.

В четвертому розділі дипломної наукової роботи розглянуто деякі питання охорони праці працівників у офісі фірми «Accenture», а також організаційні заходи щодо запобігання надзвичайних ситуацій, пожежна безпека кабінету. Для покращення умов праці було вирішено змінити такі фактори умов праці в даному офісному приміщенні, а саме понизити відносну вологість повітря, понизити тривалість зосередженого спостереження, понизити тривалість безперервної роботи за добу, та оптимізувати режим праці та відпочинку.

П'ятий розділ є методичною частиною, в якій наводяться методичні вказівки для виконання лабораторних робіт з вивчення пакету Maple та застосування його в курсах «вищої та прикладної математики». Описані основні можливості мови Maple та його структура з детально описаними командами. Розглянуті дві основні команди для знаходження розв'язків диференціальних рівнянь. Показана їх різниця, яка проілюстрована практичними прикладами.

## **ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ**

Симетрійний аналіз є потужним інструментом для пошуку точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь. Використовуючи апарат симетрійного аналізу в роботі досліджено симетрійні властивості ДРЧП, зокрема рівняння нестационарної фільтрації, теплопровідності, нелінійне хвильове рівняння та рівняння ейконалу.

В результаті виконання роботи були досліджені максимальні алгебри інваріантності даних диференціальних рівнянь в частинних похідних. Була досліджена лієвська та Q-умовна симетрія ДРЧП. Проведені редукції даних рівнянь



до звичайних диференціальних рівнянь. За допомогою симетрійної редукції знайдено низку точних розв'язків.

Проведено огляд методів бібліотек пакету Maple для дослідження симетрійних властивостей ДРЧП. За допомогою яких знайдено інфінітезимальні оператори за допомогою стандартного пакету Maple – PDEtools.

Досліджені основні методи програмної бібліотеки SADE, за допомогою яких знаходяться інфінітезимальні оператори симетрії, будуються інваріанти, здійснюється редукція диференціальних рівнянь в частинних похідних до звичайних диференціальних рівнянь. За допомогою бібліотеки SADE розглянуто не лише класична лієвська симетрію, а й некласична симетрія та симетрія Лі-Беклунда. Здійснено порівняльний аналіз стандартного пакету PDFtools та програмного пакету SADE.

## **СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ МАГІСТЕРСЬКОЇ НАУКОВОЇ РОБОТИ**

1. Воробйова А.І., Савицька В.П Точні розв'язки рівняння нестационарної фільтрації – Всеукраїнська науково-методична конференція «Могилянські читання – 2015: досвід та тенденції розвитку суспільства в Україні: глобальний, національний та регіональний аспекти» : [збірник тез]. – Миколаїв: Вид-во ЧДУ ім. П. Могили, 2015, с 95-98.

2. Савицька В. Дослідження симетрійних властивостей рівняння нестационарної фільтрації. Актуальні проблеми сучасної прикладної математики : матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих науковців. – Миколаїв : НУК, 2016. С.73—76.

3. Савицька В.П Дослідження симетрійних властивостей рівняння нестационарної фільтрації в пакеті Maple – Тези Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих науковців «Інтелектуальні інформаційні системи». – Миколаїв: Вид-во ЧДУ імені Петра Могили, 2016. – 168 с.

4. Савицька В. П. Дослідження рівняння теплопровідності / В. П. Савицька // // Актуальні проблеми сучасної прикладної математики : матеріали II Всеукраїнської

науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих учених. – Миколаїв : НУК, 2017. – С. 85–87.

5. Воробйова А. І. Розробка окремих модулів системи table ого інтерфейсу для дослідження Q-умовної симетрії ДРЧП / А. І. Воробйова, В. П. Савицька // Ольвійський форум – 2018 : Стратегії країн Причорноморського регіону в геополітичному просторі : XII міжнар. наук.-практ. конф. 7–10 червня 2018 р., м. Миколаїв : тези доп. : Автоматизація та комп'ютерно-інженерні технології. АСУ, CASE – засоби та програмна інженерія. Інтелектуальні інформаційні системи. Комп'ютерна інженерія / Чорном. нац. ун-т ім. Петра Могили. – Миколаїв : Вид-во ЧНУ ім. Петра Могили, 2018. – С. 47–49.

## АНОТАЦІЯ

**Савицька Вікторія Петрівна.** Дослідження симетрійних властивостей рівнянь математичної фізики в Maple з використанням бібліотеки SADE. – На правах рукопису.

Магістерська наукова робота на здобуття освітньої кваліфікації «Магістр системного аналізу». – Чорноморський національний університет імені Петра Могили, Миколаїв, 2019.

Наукова робота, що розглядається, присвячена дослідженню диференціальних рівнянь в частинних похідних за допомогою програмного пакету SADE в Maple. Вона має п'ять розділів. У першому розділі наведена класифікація диференціальних рівнянь в частинних похідних, здійснено опис основних теоретичних відомостей із теорії групового аналізу. У другому розділі описаний метод симетрійної редукції на прикладах конкретних диференціальних рівнянь в частинних похідних, який базується на знаходженні максимальної алгебри інваріантності, яка в свою чергу генерує абзац, що зводить ДРЧП до звичайних диференціальних рівнянь. В третьому розділі роботи було досліджено можливості математичного пакету Maple до відшукування симетрій диференціальних рівнянь в частинних похідних (ДРЧП) за допомогою бібліотек PDEtools та SADE. Описано основні методи та переваги використання пакету SADE. В спеціальному розділі дипломної роботи розглянуто деякі питання охорони праці працівників у офісному приміщенні, а також організаційні заходи щодо запобігання надзвичайних ситуацій. П'ятий розділ є методичною частиною, в якій наводяться методичні вказівки для виконання лабораторних робіт з вивчення пакету Maple та застосування його в курсах «вищої та прикладної математики».

*Ключові слова: симетрія, інваріантність, анзац, редукція, Maple, PDEtools, SADE.*

## ABSTRACT

Among the whole set of differential equations in partial derivatives, there are relatively few equations describing natural phenomena. The vast majority of equations of mathematical physics have nontrivial symmetric properties. Using the symmetric reduction method allows finding exact solutions and reproducing known solutions based on group properties.

The scientific work is devoted to the study of differential equations in partial derivatives using the SADE software package in Maple. It has five sections. In the first section the classification of differential equations in partial derivatives is given, the description of the basic theoretical information from the theory of group analysis is carried out. The second section describes the method of symmetric reduction on examples of particular differential equations in partial derivatives, which is based on finding the maximum invariant algebra, which in turn generates ansatz, which reduces the data of the equation to ordinary differential equations. In the third section of the paper, the possibilities of Maple's mathematical package for finding the symmetries of differential partial differential equations (PDE) with the help of the libraries PDEtools and SADE were investigated. The main methods and advantages of using the SADE package are described. In a special section of the thesis, some issues of occupational safety at the office premises were considered, as well as organizational measures for the prevention of emergencies. The fifth section discusses the main theoretical information concerning Maple's structure and shows the use of commands used to solve differential equations. The professional part consists of 135 pages, has 2 tables, 4 figures and 2 annexes.

*Key words: symmetry, invariance, ansatz, reduction, Maple, SADE.*